UNIDAD 7. MÁQUINAS, CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1. LAS MÁQUINAS

Podemos definir una **máquina** como una **combinación de elementos resistentes provistos de determinados movimientos, *capaz de realizar un trabajo útil***.

El término **mecanismo** se aplica sólo a los dispositivos que proporcionan los movimientos precisos de las piezas que forman parte de las máquinas.

Es decir, el concepto de máquina está ligado a la realización de trabajo útil.

Se denominan **máquinas simples** a los dispositivos elementales que se encuentran en casi todas las máquinas. Serían la palanca, la polea, el torno, el plano inclinado, el tornillo y la cuña.

Estas máquinas simples tienen la función principal de transformar fuerzas. Se define el **desarrollo mecánico** (M) (a veces también rendimiento) como la relación entre la fuerza de salida (resistencia R) y la fuerza de entrada (potencia P):

$$M = \frac{R}{P}$$

Para el estudio de las máquinas simples, se parte de dos **condiciones de equilibrio**:

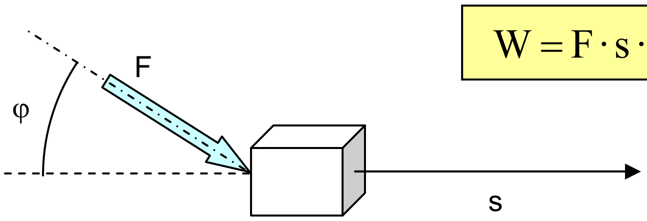
- La resultante de todas las fuerzas actuantes ha de ser nula
- La resultante de los momentos de las fuerzas actuantes respecto a un mismo eje ha de ser nulo.

2. TRABAJO

Una fuerza aplicada a un cuerpo realiza **trabajo** cuando produce un desplazamiento de dicho cuerpo. Si la dirección de aplicación de la fuerza y la dirección del desplazamiento no coinciden, sólo la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento realiza trabajo.

Denominando **W** al trabajo, **F** a la fuerza, **s** al desplazamiento y φ al ángulo que forman las direcciones de ambos, tenemos:

$$\boxed{W = F \cdot s \cdot \cos\varphi}$$



En términos vectoriales, se puede definir el trabajo como el producto escalar de los vectores fuerza y desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\varphi$$

Cuando el **cos** φ es positivo, el trabajo se denomina **trabajo motor**; cuando es negativo, el trabajo se denomina **trabajo resistente** (por ejemplo, una fuerza que frena el movimiento de un cuerpo).

Nota: hemos de observar que la idea de trabajo con que nos expresamos en el lenguaje cotidiano no coincide con la definición científica. Así, cuando elevamos un cuerpo con la mano, realizamos trabajo, sin embargo, cuando sólo lo sostenemos en el aire, no estamos realizando trabajo, por mucho esfuerzo que estemos haciendo.

2.1. Trabajo realizado por una fuerza variable.

Hasta ahora hemos supuesto que la fuerza que produce el trabajo era constante y la trayectoria seguida por el móvil era rectilínea. Sin embargo, en muchos casos esto no es así, como por ejemplo, en un motor de explosión.

En estos casos, consideramos el desplazamiento total dividido en un gran número de pequeños desplazamientos elementales ($d\vec{s}$) que se suponen rectilíneos y en ellos la fuerza se mantiene constante. El trabajo elemental realizado en dichos desplazamientos será:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos\varphi$$

El trabajo total correspondiente al desplazamiento entre una posición inicial A y una posición final B, vendrá dado por:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Expresando $\vec{F}$ y $d\vec{s}$ en función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad \text{y} \quad d\vec{s} = dx\ \vec{i} + dy\ \vec{j} + dz\ \vec{k}$$

quedaría

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

2.1.1. Fuerzas conservativas y no conservativas

Cuando el trabajo realizado por una fuerza para desplazar una partícula entre dos puntos no depende del camino seguido se dice que es una **fuerza conservativa**. Son fuerzas conservativas las gravitatorias, las fuerzas elásticas y las fuerzas electrostáticas.

Cuando el trabajo realizado depende de la trayectoria seguida entre el punto inicial y final, se dice que es una **fuerza no conservativa**. Son fuerzas no conservativas las de rozamiento o las fuerzas magnéticas.

Ejemplo 1:

Sea un móvil que se mueve en el plano XY sobre el que actúa una fuerza $\vec{F} = 2x\ \vec{i} + y^2 \vec{j}$. ¿Qué trabajo realiza dicha fuerza cuando se desplaza el móvil desde el punto (0,1) hasta el punto (2, 5)?

$$W = \int_{(0,1)}^{(2,5)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 2x dx + \int_1^5 y^2 dy = \left[x^2\right]_0^2 + \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^5 = (4-0) + \left(\frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = 45{,}33\ \text{J}$$

Observamos que el trabajo realizado por la fuerza no depende del camino seguido desde el punto inicial al final. En ningún momento hemos necesitado conocer dicho camino. Se trata de una fuerza conservativa.

Ejemplo 2:

Sea un móvil que se mueve en el plano XY sobre el que actúa la fuerza $\vec{F} = y^2\ \vec{i}$. ¿Qué trabajo realiza dicha fuerza cuando se desplaza el móvil desde el punto (0,1) al punto (2,5)?

$$W = \int_{(0,1)}^{(2,5)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 y^2 dx + \int_1^5 0\, dy = \int_0^2 y^2 dx$$

Observamos que para resolver esta integral necesitamos conocer la trayectoria seguida desde el punto inicial al final, que será la relación entre ***y*** y ***x***. Calculémoslo por dos caminos diferentes:

a) $y = x^2 + 1$

$$W = \int_0^2 y^2 dx = \int_0^2 (x^2+1)^2\, dx = \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 + \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^2 + [x]_0^2 =$$

$$= \frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 = 13{,}73\ J$$

b) $y = 2x + 1$

$$W = \int_0^2 y^2 dx = \int_0^2 (2x+1)^2\, dx = \int_0^2 (4x^2 + 4x + 1)\, dx = \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^2 + \left[2x^2\right]_0^2 + [x]_0^2 =$$

$$= \frac{32}{3} + 8 + 2 = 20{,}67\ J$$

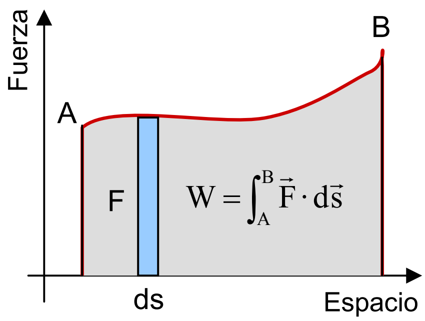
Observamos, que dependiendo del camino seguido por el cuerpo en su desplazamiento, el trabajo realizado por la fuerza es diferente. Se trata de una fuerza no conservativa

2.1.2. Representación gráfica del trabajo

Podemos visualizar gráficamente la magnitud trabajo si representamos en un diagrama cartesiano la fuerza en relación con el espacio recorrido.

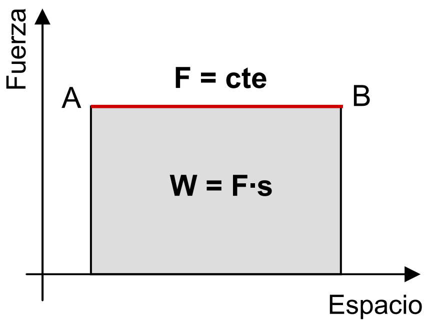
El trabajo sería igual al área de la figura limitada por la curva que representa a la fuerza, el eje de espacio y las ordenadas correspondientes a los puntos inicial y final.

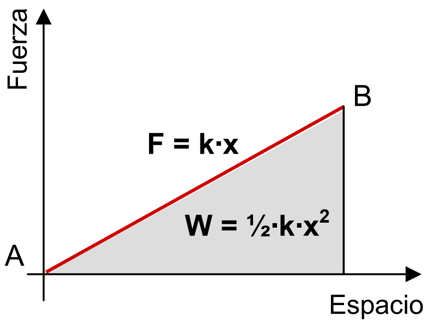
En el caso más general de una **fuerza variable y una trayectoria no rectilínea**, la representación sería: ⇨



En el caso particular de una **fuerza constante y una trayectoria rectilínea**, el área sería un rectángulo, siendo el trabajo: **W = F · s**.

En el caso particular de una **fuerza que varía linealmente con la distancia y una trayectoria rectilínea**, como en el caso de un muelle de constante elástica k (F = k · x), el área sería un triángulo y el trabajo: **$W = ½ \cdot k \cdot x^2$**.





2.2. El trabajo de rotación

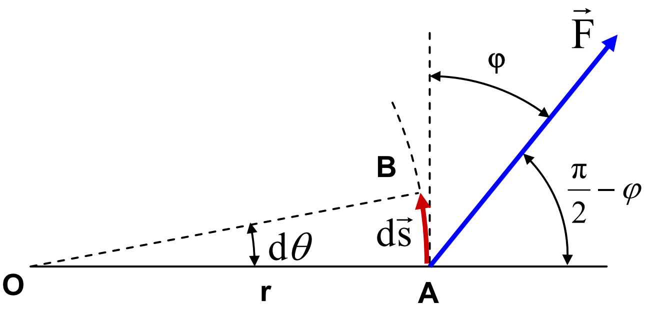
Consideremos un cuerpo que puede girar alrededor de un eje O al aplicarle una fuerza $\vec{F}$ en un punto A del mismo. Este punto describirá una trayectoria circular en torno al eje de giro. Al existir un desplazamiento, se realiza un trabajo denominado **trabajo de rotación**.

Supongamos un pequeño desplazamiento infinitesimal $d\vec{s}$ del punto A hasta el punto B. Si denominamos **dθ** al pequeño ángulo girado expresado en radianes y **r** a la distancia desde el punto A al eje de giro O, tenemos:

ds = r · dθ

Al ser $d\vec{s}$ muy pequeño podemos considerarlo prácticamente un vector rectilíneo que forma un ángulo φ con $\vec{F}$. El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ será:

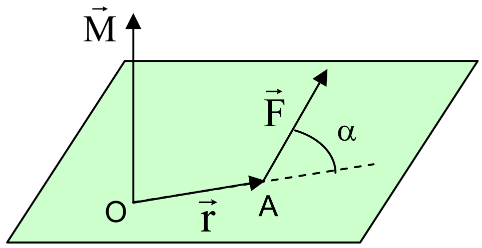
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot r \cdot d\theta \cdot \cos \varphi$$



Si tenemos en cuenta la definición de **momento de una fuerza con respecto a un punto**:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$\vec{M}$ es un vector cuyo módulo es **M = F · r · sen** α y cuya dirección es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$.



La expresión del trabajo elemental dW quedaría:

$$dW = F \cdot r \cdot d\theta \cdot \cos \varphi = F \cdot r \cdot d\theta \cdot \text{sen}\,(\pi/2 - \varphi) = M \cdot d\theta$$

El trabajo total sería:

$$W = \int_A^B M \cdot d\theta$$

En el caso particular de que el par o momento fuera constante, la expresión del trabajo quedaría:

$$\boxed{W = M \cdot \theta}$$

siendo θ el ángulo total girado por el cuerpo y **M** el momento de la fuerza aplicada o par de rotación respecto al eje de giro.

2.3. El trabajo de expansión/compresión de un gas en un cilindro

Consideremos un gas en el interior de un cilindro provisto de un émbolo de sección **S**. Si denominamos por **p** a la presión del gas, éste ejercerá sobre el émbolo una fuerza **F = p · S**.

Como consecuencia de la fuerza, el émbolo realizará un desplazamiento desde un punto inicial A a otro B. Para evaluar el trabajo realizado, descompondremos el desplazamiento total en un gran número de pequeños desplazamientos infinitesimales **dx**. Estos desplazamientos son tan pequeños, que en cada uno de ellos, la presión puede considerarse constante.

Por otra parte, un desplazamiento dx del émbolo, da lugar a un variación de volumen ocupado por el gas de **dV = S · dx** (Si $V_B > V_A$, se trata de una expansión; si $V_B < V_A$, se trata de una compresión).

El trabajo realizado en cada desplazamiento vendrá dado por: **$dW = F \cdot dx = p \cdot S \cdot dx = p \cdot dV$**

El trabajo total será:

$$W = \int_A^B p \cdot dV$$

en el caso particular de que la presión se mantenga constante durante todo el proceso de expansión, la expresión anterior se convierte en:

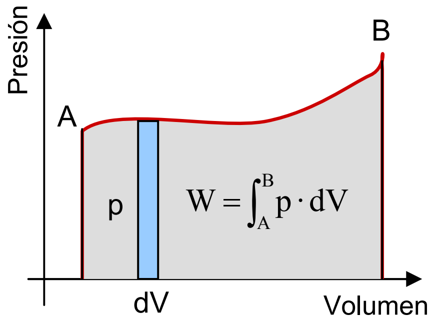
$$\boxed{W = p \cdot \Delta V}$$

siendo $\Delta V = V_B - V_A$ el aumento de volumen del gas en todo el proceso.

Si se trata de una expansión ($V_B > V_A$) el trabajo es positivo, y cuando se trata de una compresión ($V_B < V_A$) el trabajo es negativo.

2.3.1. Representación gráfica del trabajo de expansión/compresión

Podemos visualizar gráficamente el trabajo de expansión si representamos en un diagrama cartesiano la presión en relación con el volumen ocupado.



El trabajo sería igual al área de la figura limitada por la curva que representa a la presión, el eje de volumen y las ordenadas correspondientes a los volúmenes inicial y final.

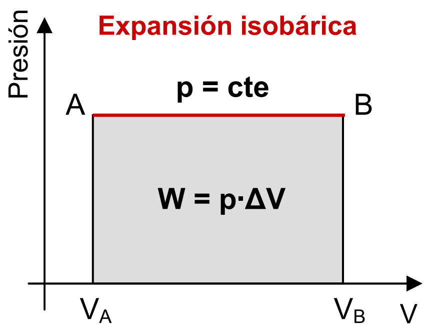
En el caso particular de una **expansión isobárica** (a presión constante), el área que representa al trabajo sería un rectángulo, siendo el trabajo **$W = p \cdot (V_B - V_A)$**.

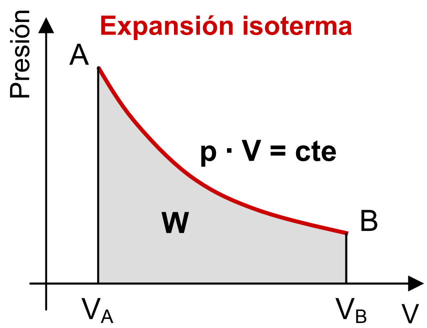
Si el gas experimenta una **expansión isoterma** (a temperatura constante) y además se comporta como un gas ideal (cumple la ecuación de los gases ideales **$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$**), de la expresión del trabajo se deduce:

$$W = \int_A^B p \cdot dV = \int_A^B \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_B}{V_A} = p_A \cdot V_A \cdot \ln \frac{V_B}{V_A} = p_B \cdot V_B \cdot \ln \frac{V_B}{V_A} =$$

$$= n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_A}{p_B} = p_A \cdot V_A \cdot \ln \frac{p_A}{p_B} = p_B \cdot V_B \cdot \ln \frac{p_A}{p_B}$$

Nota: en la ecuación de los gases ideales (**$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$**), **n** es el número de moles del gas, **R** es la constante universal de los gases = 0,082 (atm · litro)/ (K · mol) = 8,3144 J/(K · mol) y **T** la temperatura absoluta.





3. POTENCIA

Podemos observar, que el trabajo realizado por una máquina depende de la fuerza realizada y el espacio recorrido, pero no del tiempo empleado. Por ejemplo, se realiza el mismo trabajo levantando una carga de 100 kg a una altura de 20 m si se tarda 1 minuto que si se tarda 1 hora.

Para relacionar el trabajo realizado con el tiempo empleado se define la magnitud **Potencia** que es igual al trabajo realizado por unidad de tiempo.

$$\boxed{P = \frac{W}{t}}$$

En el caso de que el trabajo no se realice de forma uniforme a lo largo del tiempo, se divide el tiempo total en intervalos muy pequeños de tamaño infinitesimal, dt, de forma que el trabajo realizado en dicho intervalo de tiempo, dW, sea prácticamente uniforme.

Definimos entonces la **potencia instantánea** como:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que **dW =** $\vec{F} \cdot d\vec{s}$, tenemos:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

3.1. La potencia de rotación

Cuando un cuerpo gira a una velocidad angular ω por la acción de un par motor M, la potencia instantánea vendrá dada por:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{M} \cdot d\vec{\theta}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

En esta expresión, si expresamos M en N·m y ω en rad/s, la potencia vendrá dada en W.

Si la velocidad de giro, como suele ser frecuente, la tenemos en rpm (se designa entonces por n), tendremos en cuenta la relación **ω = 2·π·n/60**.

3.2. La potencia hidráulica

Si por una tubería de sección **S** circula un fluido a una velocidad **v**, el caudal **Q** (volumen de fluido que circula por unidad de tiempo) será: **Q = S · v**, de donde se deduce que **v = Q / S**.

Si la presión del fluido es p, la fuerza que éste ejerce sobre una sección del propio fluido es F = p · S, de donde se deduce la expresión de la potencia hidráulica:

$$P = F \cdot v = p \cdot S \cdot \frac{Q}{S} = p \cdot Q$$

En esta expresión, si expresamos p en Pa y Q en m^3/s, obtenemos la potencia en W.

4. ENERGÍA

La Ciencia no dispone aún de una definición correcta de la energía. Conocemos sus manifestaciones y sus efectos: la realización de **trabajo**, la variación de **temperatura**, **cambios de estado**, etc. La definición más aproximada sería:

Energía es la capacidad para realizar un trabajo

La energía se manifiesta de múltiples formas, pudiendo convertirse unas formas en otras. Vamos a ver las más importantes desde el punto de vista del funcionamiento de las máquinas.

4.1. Energía mecánica

Es la energía almacenada en los cuerpos materiales y puede definirse como la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo en virtud de su velocidad (*energía cinética*), de su posición en un campo gravitatorio (*energía potencial gravitatoria*), de su estado de tensión interno (*energía potencial elástica*), de su posición en un campo eléctrico (*energía potencial electrostática*), etc.

4.1.1. Energía cinética

Es la energía que posee un cuerpo por el hecho de estar en movimiento.

La energía cinética de un cuerpo de masa **m** que se traslada con una velocidad **v** viene dada por la expresión:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Teorema de la energía cinética (o de las fuerzas vivas)

Si sobre un cuerpo de masa **m** actúa una fuerza que realiza un trabajo **W** y, como consecuencia, la velocidad del cuerpo pasa de un valor inicial v_1 a un valor final v_2, se cumple:

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = E_{C2} - E_{C1} = \Delta E_C$$

Nota: si el cuerpo disminuye su velocidad, según la expresión anterior, el trabajo sale con signo negativo, lo que indica que es realizado por el propio cuerpo.

Energía cinética de rotación

Si un cuerpo posee un movimiento de rotación en torno a un eje con velocidad angular **ω**, podemos considerarlo formado por una infinidad de partículas, cada una con una masa **dm**, todas girando a la misma velocidad angular ω (si el cuerpo es rígido). Si esta partícula está a una distancia **r** del eje de giro (cada partícula estará a una distancia r propia), su velocidad será **v = ω · r**. La energía cinética de rotación de cada partícula vendrá dada por:

$$dE_C = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

La energía cinética de rotación total de todas las partículas será:

$$\boxed{E_C =} \int \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \int r^2 \, dm \boxed{= \frac{1}{2} \, I \, \omega^2}$$

La expresión $I = \int r^2 dm$ recibe el nombre de **momento de inercia del sólido con respecto al eje de giro**.

El momento de inercia se mide en kg · m^2.

Nota: Hemos de observar que el momento de inercia de un sólido es diferente dependiendo del eje de giro que se considere.

Energía cinética total

Si un sólido se encuentra animado de un movimiento general de traslación y rotación, su energía cinética total es la suma de la energía cinética de traslación de su centro de gravedad y de la energía cinética de rotación en torno a un eje instantáneo que pase por su centro de gravedad.

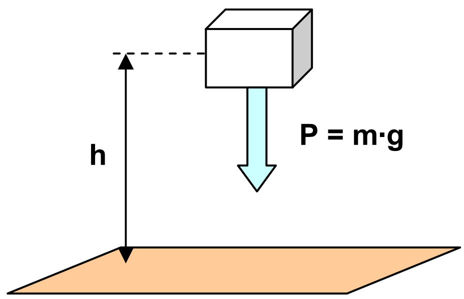
4.1.2. Energía potencial gravitatoria

Es la energía que posee un cuerpo debido a la posición que ocupa en el campo gravitatorio de la Tierra.

La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa **m** situado a una altura **h** viene dada por la expresión, siguiente, en la que **g** es la aceleración de la gravedad (g = 9,8 m/s^2):

$$\boxed{E_{pg} = m \cdot g \cdot h}$$

Nota: la energía potencial no es un valor absoluto sino relativo pues depende del nivel de referencia con respecto al que se mida la altura h. Así, podríamos medirla respecto al nivel del mar, respecto al suelo, etc.



4.1.3. Energía potencial elástica

Es la energía almacenada en un cuerpo elástico (resorte) en virtud de su estado de tensión debido a la deformación producida en él por una fuerza.

Su valor viene dado por la expresión:

$$\boxed{E_{px} = \frac{1}{2} k \cdot x^2}$$

Siendo **k** la constante elástica del resorte y **x** su deformación.

Recuerda:

La **ley de Hooke** establece que en los cuerpos elásticos, la fuerza deformadora **F** es proporcional a la deformación **x** producida. Es decir, **F= k·x**, siendo **k** la *constante elástica del resorte*, cuya unidad de medida en el S.I. es **N/m**.

4.2. Conservación de la energía

Además de la energía mecánica que hemos visto, existen otras formas de energía como la energía interna, la energía química o la energía nuclear, pudiéndose transformar unas formas en otras.

El **principio de conservación de la energía** establece que en un sistema aislado (no intercambia materia ni energía con el exterior) se cumple que **la energía total permanece constante**, aunque puede transformarse de unas formas en otras.

5. RENDIMIENTO DE UNA MÁQUINA

No toda la energía disponible en un cuerpo, sistema o máquina puede convertirse totalmente en energía o trabajo útil. Una parte de ella se convierte inevitablemente en calor a causa del rozamiento, el cual se disipa al exterior o a los fluidos que lubrican las partes móviles de la máquina. Otra parte se pierde en vencer la rigidez de elementos como cables que se deforman durante su funcionamiento, o la viscosidad de los fluidos, etc.

Si denominamos **trabajo motor** (**W_M**) a la energía que se le aporta a una máquina, **trabajo útil** (**W_U**) a la energía que ésta proporciona, y **trabajo pasivo** o **resistente** (**W_R**) a la energía pérdida en rozamiento, deformación, etc., tenemos que $W_M = W_U + W_R$.

Se define el **rendimiento** de una máquina como el cociente entre el trabajo útil y el trabajo motor:

$$\eta = \frac{W_U}{W_M} = \frac{W_M - W_R}{W_M} = 1 - \frac{W_R}{W_M}$$

El rendimiento se puede expresar también en función de la potencia, ya que los trabajos antes citados se realizan todos en el mismo tiempo:

$$\eta = \frac{P_U}{P_M} = \frac{P_M - P_R}{P_M} = 1 - \frac{P_R}{P_M}$$

Si tenemos varias máquinas dispuestas consecutivamente, de forma que el trabajo útil de una es el trabajo motor de la siguiente y así sucesivamente, el rendimiento total será igual al producto de los rendimientos de cada una de las máquinas: $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot ...$